

تمرینهای از فصل دنباله و سری

۱- همگرایی یا واگرایی دنباله‌های زیر را تعیین کنید.

$$a_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{3 \times 6 \times 9 \times \dots \times (3n)} \quad (\text{ب})$$

$$a_n = \arcsin \frac{2n-4}{4n+5} \quad (\text{الف})$$

$$a_n = \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}}{n} \quad (\text{د})$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \quad (\text{ج})$$

۲- نوع همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را تعیین کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \left(\frac{1}{n} \right) \right)^{n^2} \quad (\text{ب})$$

$$\sum \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n \right) \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sqrt{\ln n}} \quad (\text{د})$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 \ln n} \quad (\text{ج})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}}{n + \sqrt{n^4 - n}} \quad (\text{و})$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n} \quad (\text{ه})$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{\ln \ln n}}{n \ln n} \quad (\text{ح})$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n \sqrt{n}} \quad (\text{ز})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+n}{1+n} \right)^{2n} \quad (\text{ی})$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \quad (\text{ط})$$

۳- شعاع و بازه‌ی همگرایی سری‌های توانی زیر را تعیین کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n 3^n} \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{\ln n} \quad (\text{الف})$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{2^n} x^n \quad (\text{د})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n \quad (\text{ج})$$

$$\sum \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) (x-1)^n \quad (\text{ه})$$

۴- بسط ماکلورن تابع $y = \sqrt{x^2 + 1}$ را بنویسید.

۵- بسط ماکلورن تابع $y = \cosh x$ را بنویسید.

۶- بسط ماکلورن تابع $y = e^{-x^2}$ را نوشته و دوبار از آن مشتق بگیرید و به کمک آن ثابت کنید که:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n! 2^n} = 1$$

۷- بسط ماکلورن تابع $y = x e^x$ را بنویسید و سپس با انتگرالگیری از آن در بازه‌ی $[0, 1]$ نشان دهید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! (n+2)} = \frac{1}{2}$$

۸- سری ماکلورن تابع $y = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ را بنویسید.

۹- سری تیلور تابع $y = \left(x - \frac{\pi}{2} \right)^2 \cos x$ را حول $x = \frac{\pi}{2}$ بنویسید.

۱۰- حاصل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ را بیابید.