

تمرین‌های ریاضی عمومی (۱) فنی مباحث پایانترم

روش‌های انتگرال‌گیری

۱. حاصل انتگرال‌های زیر را به دست آورید.

$$\int \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x + 2} dx \quad (\text{ه}) \qquad \int \frac{1}{x^2(x^2 + 1)^2} dx \quad (\text{ج}) \qquad \int \frac{x}{x^2 - 4} dx \quad (\text{آ})$$

$$\int \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x^2 + 2x + 1)} dx \quad (\text{د}) \qquad \int \frac{5}{1 + x^3} dx \quad (\text{ب})$$

۲. هریک از انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

$$\int \frac{\cos^5 t}{\sqrt{\sin t}} dt \quad (\text{ج}) \qquad \int \sin^3 x \cos^2 x dx \quad (\text{آ})$$

$$\int_0^{\pi/2} \sec^4(x/2) dx \quad (\text{د}) \qquad \int \sin^2(\pi x) \cos^5(\pi x) dx \quad (\text{ب})$$

۳. مطلوب است محاسبه هریک از انتگرال‌های زیر

$$\int \sqrt{x^2 - x + 1} dx \quad (\text{ه}) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{36x^2 - 49}} dx \quad (\text{ج}) \qquad \int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} dx \quad (\text{آ})$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} dx \quad (\text{د}) \qquad \int (x^2 - 1)^{5/3} dx \quad (\text{ب})$$

۴. هریک از انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

$$\int \frac{1}{\sin x + 2} dx \quad (\text{ج}) \qquad \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin x - \cos x + 1} dx \quad (\text{آ})$$

$$\int \frac{\cos x dx}{1 - \cos x} \quad (\text{د}) \qquad \int \frac{dx}{3 - 5 \sin x} \quad (\text{ب})$$

۵. به کمک انتگرال‌گیری، فرمول بازگشتی برای روابط زیر بدست آورید.

$$I_n = \int x^n e^x dx \quad (\text{ب})$$

$$I_n = \int (\ln x)^n dx \quad (\bar{\text{آ}})$$

۶. هریک از انتگرال های زیر را حساب کنید.

$$\int \sqrt[3]{2x+1} dx \quad (\text{د}) \quad \int x \cos \sqrt{x} dx \quad (\text{ج}) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} \quad (\text{ب}) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \quad (\bar{\text{آ}})$$

۷. همگرایی یا واگرایی انتگرال های زیر را تعیین کنید و در صورت همگرایی مقدار آن را حساب کنید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx \quad (\text{ه}) \quad \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x}} \quad (\text{ج}) \quad \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} \quad (\bar{\text{آ}})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \quad (\text{د}) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{1+x^4} \quad (\text{ب})$$

۸. همگرایی یا واگرایی انتگرال های زیر را تعیین کنید.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos^2 x dx}{\sqrt{x^2+x}} \quad (\text{د}) \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^5+4x^3+x}} \quad (\text{ج}) \quad \int_1^{\infty} \frac{x^3 dx}{x^5 + \sin^2 x} \quad (\text{ب}) \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x) dx \quad (\bar{\text{آ}})$$

کاربردهای انتگرال

۹. حجم جسم بوجود آمده از ناحیه های مشخص شده زیر را حول محور داده شده بیابید.

$$x = 2y - y^2 \quad \text{حول محور } y \quad (\bar{\text{آ}})$$

$$y = x^2, y = 1, y = 4, x = 0 \quad \text{حول محور } x \quad (\text{ب})$$

$$y = 2x, y = x^2 \quad \text{حول محور } x = 2 \quad (\text{ج})$$

۱۰. ناحیه واقع بین دو شاخه از منحنی $x^3 = (2-x)^2$ و خط $x = 1$ را حول محور x دوران می دهیم، حجم جسم حاصل را بیابید.

۱۱. حجم جسم تولید شده به وسیله شکل محدود به منحنی های زیر را حساب کنید.

$$xy = 4, x = 1, x = 4, y = 0 \quad \text{حول محور } y \quad (\bar{\text{آ}})$$

$$(y-a)^2 = ax, x = 0, y = 2a \quad \text{حول محور } x \quad (\text{ب})$$

$$x^2 - y^2 = 4, y = \pm 2 \quad \text{حول محور } y \quad (\text{ج})$$

۱۲. طول قوس منحنی $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ از $x_1 = 3$ تا $x_2 = 6$ را حساب کنید.

۱۳. طول مسیر محدود به منحنی های $x^2 = (y + 1)^3$ و $y = 4$ را حساب کنید.

۱۴. طول قوس منحنی $9y^2 = 4x^3$ را روی فاصله $[0, 3]$ را حساب کنید.

دنباله و سری

۱۵. همگرایی یا واگرایی هر یک از دنباله های زیر را بررسی کنید.

$$a_n = \frac{\sin(2n)}{1 + \sqrt{n}} \quad (\text{ه})$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad (\text{آ})$$

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n + \sqrt[3]{n}} \quad (\text{و})$$

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n}{3} \quad (\text{ب})$$

$$a_n = \frac{4n^2 - \sqrt{n}}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1}} \quad (\text{ز})$$

$$a_n = \sqrt{n^2 - 2n} - n \quad (\text{ج})$$

$$a_n = \sqrt[3]{n^2 - n^3} + n \quad (\text{ح})$$

$$a_n = \frac{\pi^n}{1 + 22n} \quad (\text{د})$$

۱۶. همگرایی یا واگرایی هر سری را تعیین کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - e^n} \quad (\text{د})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n - \sqrt{n^2 - 1}}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (\text{آ})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n} \quad (\text{ه})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2n(n^2+1)} \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n \quad (\text{و})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh n} \quad (\text{ج})$$

۱۷. اگر مجموع جزئی سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ برابر با $s_n = \frac{n-1}{n+1}$ باشد، مقادیر a_n و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را بیابید.

۱۸. تعیین کنید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-5)^n}{3^n(n+1)}$ به ازای چه مقادیری از $x \in \mathbb{R}$ همگرای مطلق، همگرای مشروط یا واگراست.

۱۹. تعیین کنید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n}}$ به ازای چه مقادیری از $x \in \mathbb{R}$ همگرایی مطلق، همگرایی مشروط یا واگراست.

۲۰. همگرایی یا واگرایی سری های زیر را بررسی کنید. در صورت همگرایی مقدار آن را بیابید.

$$\begin{array}{ll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \quad (\text{ج}) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^{n+1}}{3^n} \quad (\bar{\text{ا}}) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^2 + n}{2^{n+1}n(n+1)} \quad (\text{د}) & \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(2+\pi)^{2n}} \quad (\text{ب}) \end{array}$$

۲۱. همگرایی مشروط، مطلق یا واگرایی سری های زیر را تعیین کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(-100)^n} \quad (\text{ب}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100 \cos(n\pi)}{2n+3} \quad (\bar{\text{ا}})$$

۲۲. بازه همگرایی سری های زیر را بیابید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-3)^n n}{n+3} \quad (\text{ب}) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+3)^2} \quad (\bar{\text{ا}})$$

۲۳. سری مک لورن توابع زیر را بنویسید.

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^3} \quad (\text{ب}) \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} \quad (\bar{\text{ا}})$$

۲۴. ابتدا سری مک لورن تابع $f(x) = x^2 e^{-x}$ را نوشته و سپس با استفاده از آن حاصل سری زیر را بیابید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^{n+1} \frac{n+2}{n!}$$