

تمرین‌های ریاضی عمومی (۱) فنی
(گردآورندگان: آقایان اکرمی، خورشیدی، منتظری)

حد و پیوستگی

• حاصل عبارت‌های زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3} \cdot 11$$

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 4} \cdot 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}} \cdot 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 + x^2} - \sqrt{2 - x^2}}{x^2} \cdot 2$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x - a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \cdot 13$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2}{1 - \sqrt[3]{x}} \right) \cdot 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{8 + 3x - x^2} - 2}{x + x^2} \cdot 14$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{10 - x} - 2}{x - 2} \cdot 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27 + x} - \sqrt[3]{27 - x}}{x + 2\sqrt[3]{x}} \cdot 15$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x}) \cdot 5$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{\sqrt[3]{x + 17} - 2} \cdot 16$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x + 1} - \sin \sqrt{x}) \cdot 6$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{1 - \tan^2 x} \cdot 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 - \frac{x}{3}} - \sqrt[3]{1 + \frac{x}{3}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{x}{3}}} \cdot 17$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \tan^2 x \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[3]{1 + 5x} - (1 + x)} \cdot 18$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 3} \cdot 9$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2}{1 - \sqrt[3]{x}} \right) \cdot 19$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{[x] - 4}{x - 4} \cdot 10$$

• با دانستن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ حاصل‌دهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} \quad .24$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} \quad .25$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x - \cos x}{1 - \sin px - \cos px} \quad .26$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + P(x)} - 1}{x} = \frac{a_1}{2} \quad .27$$

اگر $P(x) = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ ثابت کنید که $\frac{a_1}{2}$

• در تمرینات زیر m و n اعداد طبیعی هستند. حدها را در صورت وجود بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} \quad .32$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{(x+a_1) \dots (x+a_n)} - x \right) \quad .33$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2+1} + x)^n + (\sqrt{x^2+1} - x)^n}{x} \quad .34$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} \quad .35$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x)}{x} \quad .20$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{x - 1} \quad .21$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\tan x)}{\tan x} \quad .22$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} \quad .23$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) \quad .28$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2} \quad .29$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2} \quad .30$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+\alpha x} \sqrt[n]{1+\beta x}}{x} \quad .31$$

مشتق و کاربردهای آن

۱. اگر $f(x) = x(x-1)(x-2) \dots (x-100)$ ، آنگاه $f'(0)$ را حساب کنید.

۲. اگر $f(x) = [x] \sin x$ ، آنگاه $f'(\frac{\pi}{4})$ را حساب کنید.

۳. اگر $x \leq f(x) \leq x + x^2$ برای هر $|x| < 1$ ، آنگاه $f'(0)$ را حساب کنید.

۴. ضابطه مشتق تابع $f(x) = \begin{cases} 1-x & x < 1 \\ (x-1)(x-2) & 1 \leq x \leq 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases}$ را بر مجموعه اعداد حقیقی

حساب کنید.

۵. مشتق توابع زیر را حساب کنید.

$$y = \frac{1 + \sec \sqrt{x}}{2x + \tan 3x} \quad (\text{د})$$

$$y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \quad (\text{ه})$$

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2 + 2x} \quad (\text{الف})$$

$$y = \frac{2x}{\sqrt{3x^2 + 1}} \quad (\text{ب})$$

$$y = \frac{1 + 2x + x^3}{\sin(\cos 2x)} \quad (\text{ج})$$

۶. اگر y تابعی از x باشد، مطلوب است $\frac{dy}{dx}$

$$x^2 y^2 + x \sin y = 4 \tan(xy) \quad (\text{ج})$$

$$x^2 + y^2 = \tan(x + y) \quad (\text{الف})$$

$$(2xy^3 + 4)^2 + xy = 9 \quad (\text{د})$$

$$2\sqrt{x} + 2xy + \frac{1}{\sqrt{x}} = 5 \quad (\text{ب})$$

۷. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{x+1}{x}) & x > 0 \\ x^3 & x \leq 0 \end{cases}$ مفروض است. نشان دهید این تابع روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق پذیر است. ضابطه مشتق را بدست آورید.

۸. برای تابع $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ داریم $f(-1) = f(1) = 0$ ، اما برای هر $x \in [-1, 1]$ داریم $f'(x) \neq 0$. آیا این مطلب با قضیه رول در تناقض است؟ چرا؟

۹. با استفاده از تابع زیر نشان دهید عکس قضیه رول برقرار نیست.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & x < 2 \\ 5x - 4 & x \geq 2 \end{cases}$$

۱۰. نشان دهید معادله $x^7 + 3x^5 + 3x^3 + 4x - 3 = 0$ در بازه $[0, 1]$ دقیقاً دارای یک ریشه است.

۱۱. ابتدا نشان دهید توابع زیر در بازه داده شده در شرایط قضیه مقدار میانگین صدق می‌کنند و سپس c را بدست آورید.

$$[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \quad f(x) = \frac{x-1}{x+1} \quad (\text{ب})$$

$$[0, 1], \quad f(x) = x^{\frac{1}{3}} \quad (\text{الف})$$

۱۲. نشان دهید برای هر $0 < x < \frac{\pi}{4}$ ، داریم $\sin x + \tan x > 2x$.

۱۳. نشان دهید برای هر $0 < x$ ، داریم $\frac{x}{x^2 + 1} < \tan^{-1} x$.

۱۴. نشان دهید که نامساوی $|\tan a - \tan b| \leq 4|a - b|$ برای اعداد دلخواه a و b در بازه $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ برقرار است.

۱۵. نشان دهید معادله $\cos x + 2 \cos 2x + \dots + n \cos nx = 0$ حداقل یک جواب در بازه $[0, 2\pi]$ دارد.

۱۶. تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(الف) آیا تابع در صفر پیوسته است؟ (ب) آیا $f'(0)$ موجود است؟ (ج) آیا $f''(0)$ موجود است؟

۱۷. حدهای زیر را با استفاده از قاعده هوییتال محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5}.$$

۱۸. نشان دهید که حدهای زیر را نمی‌توان از قاعده هوییتال به دست آورد، سپس حدها را حساب کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$$

۱۹. مقدارهای r و s را چنان بیابید که $\lim_{x \rightarrow 0} (x^{-3} \sin 3x + rx^{-2} + s) = 0$.

انتگرال

۱. مقدار انتگرال‌های زیر را حساب کنید.

$$f(x) = \int_0^2 [2x] dx \quad (\text{ج}) \quad \int_0^5 |x - 4| dx \quad (\text{الف})$$

$$f(x) = \int_0^7 [x] dx \quad (\text{ب})$$

۲. درستی نامساوی‌های زیر اثبات کنید.

$$1 \leq \int_1^2 \sqrt{1+x^3} dx \leq 3 \quad (\text{ب}) \quad \frac{\sqrt{2}\pi}{24} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx \leq \frac{\sqrt{3}\pi}{24} \quad (\text{الف})$$

۳. مشتق هریک از توابع زیر را حساب کنید.

$$f(x) = \int_0^{x^2} \cos t^2 dt \quad (\text{ج})$$

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt \quad (\text{الف})$$

$$y = \int_3^{f_1^x \sin^2(t) dt} \frac{dy}{1 + \sin^2(y) + y^2} \quad (\text{د})$$

$$f(x) = \int_0^{x^2} x \sqrt{1+t^2} dt \quad (\text{ب})$$

$$. \int_0^{x^2} t f(t) dt = x + x^2, \quad x \neq 0 \quad \text{تابع } f(x) \text{ را چنان تعیین کنید که}$$

۵. ابتدا حدود زیر را به یک انتگرال مناسب تبدیل کرده و سپس مقدار آنها را حساب کنید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^n \cos\left(\frac{i\pi}{2n}\right) \quad (\text{ج})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i^3}{n^4} \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{2}{n} \left(1 + \frac{2^i}{n}\right)^3 \quad (\text{ب})$$

۶. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و زوج باشد. نشان دهید $g(x) = \int_0^{x^2} f(t) dt$ تابعی فرد است.

۷. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و متناوب با دوره تناوب T باشد. نشان دهید $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

۸. بدون محاسبه انتگرال روابط زیر را اثبات کنید.

$$\int_1^2 x dx \leq \int_1^2 x^2 dx \quad (\text{ب})$$

$$\int_0^1 x^2 dx \leq \int_0^1 x dx \quad (\text{الف})$$

۹. درستی رابطه زیر را بررسی کنید.

$$\frac{2}{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right)$$

$$. \int_0^2 f(x) dx \quad \text{اگر } f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$. \int_0^1 f(x) dx \quad \text{اگر } f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq t \\ t \times \frac{1-x}{1-t} & t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

۱۲. نشان دهید که $\frac{1}{\sqrt{c}} < \int_0^{\sqrt{c}} \frac{1}{\sqrt{c+x}} dx < \frac{1}{c}$.

۱۳. ثابت کنید برای هر $x \geq 0$ ، $\int_0^x \frac{\sin t}{1+t} dt \geq 0$.

۱۴. اگر n عدد صحیح مثبتی باشد نشان دهید که به ازای عددی مانند c که

$$\sqrt{n\pi} \leq c \leq \sqrt{(n+1)\pi}$$

داریم

$$\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(t^2) dt = \frac{(-1)^n}{c}.$$

• حدهای زیر را (در صورت وجود) محاسبه کنید:

۱۵) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sin \sqrt{x} dx}{x^3}$

۱۶) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_0^{(x-1)^2} \sin t^2 dt}{(x-1)^{16}}$

۱۷) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan t} dt}{\int_0^{\tan x} \sqrt{\sin t} dt}$

۱۸) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\tan x} (1 + \sin^2 t) dt}{\tan x}$

۱۹) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (\arctan t)^2 dt}{\sqrt{x^2 + 1}}$

۲۰) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}$

• با استفاده از انتگرال‌های معین، مجموع‌های زیر را محاسبه کنید.

۲۱) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$

۲۲) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$

۲۳) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}$

۲۴) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{kn}{(k+n)^2}$

۲۵) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cos \frac{ka}{n}$

۲۶) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin \frac{x}{n} \sin \frac{kx}{n}$

۲۷) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}, p > -1$

۲۸) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right).$

توابع متعالی و معکوس

۱. مقدار $(f^{-1})'(a)$ را حساب کنید.

$$a = 2, f(x) = \frac{x^2}{1 + \sqrt{x}} \quad (\text{ب})$$

$$a = 2, f(x) = x\sqrt{3+x^2} \quad (\text{الف})$$

۲. آیا توابع $\ln x^2$ و $2 \ln x$ با هم برابرند؟ توضیح دهید. در مورد $\ln x^3$ و $3 \ln x$ چه می‌توان گفت؟

۳. عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$\log_2(\log_4(\log_8 64)) \quad (\text{ب})$$

$$10^{-\log_{10} \frac{1}{5}} \quad (\text{الف})$$

۴. معادلات زیر را حل کنید.

$$e^{(\ln \circ \wedge)x} = \circ \wedge \quad (\text{ب})$$

$$2 \log_3 x + \log_9 x = 10 \quad (\text{الف})$$

۵. مشتق توابع زیر را حساب کنید.

$$f(x) = e^{2 \ln \cos x} + (\ln \sin e^x)^2 \quad (\text{ب})$$

$$f(x) = x\sqrt{x^2+x-4} \quad (\text{الف})$$

۶. تابع $\int_1^{\ln x} \cosh(t^2) dt$ مفروض است.

(الف) مشتق‌پذیری f بر بازه $(0, \infty)$ را بررسی کرده و ضابطه مشتق را تعیین کنید.

(ب) ثابت کنید f وارون پذیر است و $(f^{-1})'(0)$ را بدست آورید.

۷. مشتق توابع زیر را حساب کنید.

$$f(x) = x^3(\sec^{-1} 3x)^4 \quad (\text{ج})$$

$$f(x) = x^2 \sin^{-1}(x^2) \quad (\text{الف})$$

$$f(x) = \csc^{-1}(\sqrt{x^2+3x}) \quad (\text{د})$$

$$f(x) = \tan^{-1}(x/a) \quad (\text{ه})$$

$$f(x) = \cos^{-1}\left(\sin \frac{1}{x}\right) \quad (\text{ب})$$

۸. درستی عبارت زیر را بررسی کنید.

$$\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}(y) = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \quad (\text{الف})$$

۹. حدهای زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{x^x} - 1) \quad (\text{ج})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}} \quad (\text{د})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{e}{x}\right)^x \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{1/x^2} \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{x^{-1}} \quad (\text{ب})$$

۱۰. حدهای زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^3}{\sqrt{x}} \quad (\text{الف})$$

۱۱. مشتق توابع زیر را حساب کنید.

$$y = \sqrt[3]{\frac{x(x-1)(x-2)^2}{(x^2+2x)(2x+9)}} \quad (\text{ج})$$

$$y = \ln \left(\frac{\sqrt{\sin \theta \cos \theta}}{1 + 2 \ln \theta} \right) \quad (\text{الف})$$

$$y = \ln \left(\sqrt{\frac{(x+5)^2(x-1)^4}{(x+3)^5}} \right) \quad (\text{ب})$$

• انتگرال‌های زیر را بیابید.

$$\int_0^\pi \frac{\cos x dx}{2 + \sin x} \quad \cdot 15$$

$$\int \frac{dx}{2x+7} \quad \cdot 12$$

$$\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \quad \cdot 16$$

$$\int \frac{(x^2+1)dx}{2x^3+6x+7} \quad \cdot 13$$

$$\int_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad \cdot 17$$

$$\int \frac{dx}{x \ln x} \quad \cdot 14$$

• نشان دهید که

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + C \quad \cdot 18$$

$$\int \sec x \csc x dx = \int \frac{dx}{\cos x \sin x} = \ln |\tan x| + C \quad \cdot 19$$

• دامنه توابع زیر را تعیین کنید.

$$\ln(x - [x]) \quad \cdot 3$$

$$\ln(x^2 - 9) \quad \cdot 1$$

$$\ln(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}) \quad \cdot 4$$

$$\ln(\sin \pi x) \quad \cdot 2$$

$$\arcsin \frac{x-3}{4} + \ln(4-x) \quad .6 \qquad \sqrt{\ln \frac{5x-x^2}{4}} \quad .5$$

$$\sqrt{\arcsin(\ln x)} \quad .7$$

• با فرض این که $x < 0$ درستی نامساوی‌های زیر را تحقیق کنید. (راهنمایی: مشتق عبارت‌ها را مقایسه کنید).

$$\ln x \geq 1 - \frac{1}{x} \quad .10 \qquad \ln x < \sqrt{x} \quad .8$$

$$x - \frac{1}{2}x^2 < \ln(1+x) < x \quad .11 \qquad \ln x \leq x - 1 \quad .9$$

• نقاط ناپیوستگی توابع زیر را در \mathbb{R} مشخص کنید. ناپیوستگی‌ها در چه نقاطی رفع شدنی هستند؟

$$f(x) = x \ln^2 x \quad .12$$

$$f(x) = \ln \frac{x^2}{(1+x)(x-3)} \quad .13$$

روش‌های انتگرال‌گیری

۱. مطلوب است محاسبه هریک از انتگرال‌های زیر

$$\int \frac{\sin(5 \ln x)}{x} dx \quad (\text{ج}) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} \quad (\text{الف})$$

$$\int_0^4 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (\text{د}) \qquad \int \sqrt{e^x + e^{2x}} dx \quad (\text{ب})$$

۲. نشان دهید

$$\int_0^1 \frac{dx}{\arccos x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} dx$$

۳. مطلوب است محاسبه هریک از انتگرال‌های زیر

$$\int \frac{\sin(5 \ln x)}{x} dx \quad (\text{ج}) \qquad \int_0^{\frac{1}{\sqrt{e}}} 2x \sin^{-1}(x^2) dx \quad (\text{الف})$$

$$\int 3^{4x} dx \quad (\text{د}) \qquad \int \sqrt{e^x + e^{2x}} dx \quad (\text{ب})$$